ארגון יד לבנים
סניף ירושלים

גַלְעֵד
לזכרם

עיריית
ירושלים

# סגן משנה אביעזר (אבי) הלוי-לוין ז״ל

**בן אהובה ויצחק**

**נולד בירושלים**

**בתאריך ד׳ באדר א׳ תש״ח, 13/2/1948**

**התגורר בירושלים**

**התגייס ביולי 1966**

**שרת בחטיבת גולני**

**נפל בעת מילוי תפקידו בשרותו**

**י״ב בשבט תשכ״ט, 31/1/1969**

**נקבר בהר הרצל**

אזור: ד חלקה: 3 שורה: 15 קבר: 8

**בן 21 בנופלו**

## קורות חיים

בן יצחק ואהובה. נולד ביום ד׳ באדר א׳ תש״ח (13.2.1948) בירושלים הנצורה. בן חמש היה כאשר נתקבל לכיתה א׳ בבית הספר ״מעלה״ אשר בו סיים את לימודיו היסודיים. לאחר מכן למד ב״ישיבה״ התיכונית ״נתיב מאיר״ בה גמר את לימודיו והוא אך בין י״ז. שנה אחת למד ב״ישיבה״ הגבוהה ״כרם דיבנה״. בלימודיו עשה חיל וגרם נחת רוח מרובה להוריו. אהב מוסיקה ופרט על פסנתר ותחביבו היה בניית דגמי מטוסים. לצה״ל גויס ביולי 1966 במסגרת גרעין ״שלהבת״ של תנועת הנוער ״עזרא״. ביום גיוסו, כשנפרד מאמו לפני צאתו, לצבא, אמר: ״אמא, אף לא שערת שיבה אחת בגללי! אל תדאגי, הכל יהיה בסדר״. לאחר הטירונות נשלח לקורס מ״כ. כמ״כ הדריך בבסיס טירונים של הנח״ל ובהיאחזות ״מעלה הגלבוע״. תוך זמן מועט הפך להיות אחד מהחבר׳ה. הוא אמנם הצליח לשמור על מעמדו כמפקד אך היה משתתף

ארגון יד לבנים
סניף ירושלים

גלעד לזכרם

עיריית
ירושלים

בשיחות עם חבריו בערבים, יושב בצוותא על כוס קפה והיה מתחלק בחוויות עמהם. היה מקשיב ומספר, מטייל בחברתם - ואף "השתולל" בתוכם ללא כל מחיצות. אולם בשעה שקיבל על עצמו את תפקידו כמפקד היה מדקדק ושמר שמירה עירנית על כל פרט בשעת מילויו. בעבודה הלילית היה מראה את דאגתו לחיילים השומרים כשהיה מתלווה לחיילות בסיוריהן כדי לחלק לשומרים קפה חם למען ייהנו השומרים מן הקפה. סיורים אלה היו מתובלים בדברי בדיחות והדביק את הבנות בעליזות ששרתה עליו. במלחמת ששת הימים לחם בחזית רמת הגולן. מן המלחמה כתב: "אל דאגה! אני אומר שנית אל דאגה, מה שאני רואה לנגד עיני יכול לתת מספיק אומץ לפחדן שבפחדנים ולכל אחד במדינה". לימים יצא לקורס קצינים וכאשר סיים את בית הספר לקצינים הוצב לחטיבת "גולני". הוא הגיע לדרגה של סגן-משנה אך ביום י"ב בשבט תשכ"ט (31.1.1969) נפל בסיור לילה בשעת מילוי תפקידו. זה היה ברמת הגולן. הובא למנוחת עולמים בבית הקברות הצבאי שעל הר הרצל בירושלים. מפקדו כתב עליו ותיאר את דמותו: "אבי שירת ביחידתנו כקצין מטה וכמפקד מחלקת מרגמות. בשני תפקידיו אלה היה קרוב אלי יותר מאשר שאר הקצינים הצעירים ביחידה - הן משום אופי התפקיד והן משום אופיו המיוחד. כקצין מודיעין היה פעיל ומפעיל, מלא מרץ ורעיונות חדשים לבקרים. ירד לעמקם של דברים ביסודיות ובתבונה. לאחר שהגיע למסקנה כי יש מקום לשיפור ולהשלמה לא היסס להביע את דעתו ולהציע. לעתים היה נאבק עם חבריו ומפקדיו כדי לשכנעם בצדקת דרכו - וכל זאת בלהט, באמונה ובהכרה של צדקת דרכו. במקרים רבים קיבלתי את דעתו בניגוד לדעתם של אחרים, בכירים ממנו בתפקיד ובדרגה. כמפקד מחלקת מרגמות היה אבי ממש פנומן, קיבל מחלקה מעורערת אשר היתה ללא מפקד חודשים רבים ותוך פרק זמן מינימלי ובתנאי אמון קשים הצליח להביאה לרמה הגבוהה ביותר. מחלקתו סייעה לגדוד ולפלוגות בכל אשר עשתה בצורה מקצועית וחברית למופת... אבי לא היה מ"מ רגיל בגדוד ... כולם הכירוהו וכולם אהבוהו. תמיד התעניין בנעשה בגדוד ולחץ עלי בכל פעילות. מתנדב היה לכל תפקיד. נפילתו היתה אפיינית לדרכו. כאשר היה צורך לצאת לסיור לילה ברמת הגולן ונהג הרכב לא היה כשיר לכך התנדב הוא לצאת במקומו. נזכור אותו כאחד מטובי מפקדינו ונמשיך דרכו באמונה". ב"ישיבה" התיכונית "נתיב מאיר" הוקם חדר עיון על שמו. בקבוצת שלעבים קיימת ספרייה על שמו ועל שם חברו (מיכאל גרוס). חבריו וידידו תרמו ספרי קודש

לישיבה "כרם דיבנה". במלאת שנה לנפלו הוציאו חבריו בגרעין "שלהבת" של תנועת הנוער "עזרא" עמודי זכרון שהצטרפו לחוברת והיא נקרא "אביעזר". זמן מועט אחרי נפול אביעזר נפטר אביו מרוב יגון ואבל כבד.

## אביעזר

### לבית הלוי לוין

פרוכת נידבה אמו של אביעזר לבית הכנסת ישרון ועליה רקום שמו ושם אביו שקשתה מדי פרידתו מבן טיפוחים ושבק חיים ונצטרף לבית עולמו.

בטרם הלך לעולמו כתב ר' יצחק דברים שהודפסו בחוברת לזכרו של בנו ולא זכה לראותה יוצאת מבית הדפוס.

יתגדל ויתקדש שמיה רבא...

אני כותב את השורות הללו לחוברת לזכרך, שיזמו חבריך לספסל הלימודים ולנשק, ואני שומע את ההד העמום של הרגבים הנופלים על ארונך, מקום מנוחתך לעולמים, עד שתקום לגורלך לקץ הימים, ואני שקוע בזכרונות.

"במה יזכה נער את אורחו"? זכאי היית, בתום ובטוהר התהלכת עם אלהים ואדם. בקלה כבחמורה הקפדת ולא סטית ימינה או שמאלה מדרכך, בתנאים הקשים ביותר, באמונים המפרכים, אפילו בחזית האש. אכן נאמן היית עם עצמך וגם היותך קצין ביחידה קרבית ראית כקידוש שם שמים. אף כאשר אפשר היה קבעת עתים לתורה וארגנת שעור. אבל ביחסי אנוש לא החמרת, ותמיד היית דן את חברך לכף זכות. זוכר אני ויכוח אתך, מאותם הויכוחים בהם הארוחה היתה מסתיימת בליל שבת, על הג'ובניקים למיניהם. עמדת על כך שברגע שהם במדים הם עושים את המוטל עליהם, ואני קמתי מהשולחן כאילו אחרי דברי תוכחה, מתוך הכרה: מי אני שאינני חייל קרבי שאדון חייל לחובה. לגבי בחורי ישיבה הפטרת: תן להם ללמוד.

ובהגיע החוברת לידיו של משורר של קדושי ישראל נתן אלתרמן ששירו "החלד" הועתק אליה פקד בדברים את האם השכולה וכה כתב:

לאהובה הלוי־לוין, אֵם בישראל, —

ביראת־הכבוד, וברוח נפעמה אני כותב אליך שורות אלו, כהד מועט לכל מה שנצרר בצרור הדפים הללו, דפי זכר אביעזר בנך. מה מופלאה הדמות הנשקפת מתוך הדברים, כמה קצר אך כמה רב־פנים הוא פרק־חיים זה אשר נקטע בעוד השחר פרוש עליו. עוד הוא פרק של ראשית וכבר הוא שלמות כה טבעית אך כה מיוחדת בצירופיה, בהתמזגות זו של טעמי מורשת עתיקה עם חיות נעורים, של נפש פתוחה אל עולם ואל אדם, אל חובות הזמן הקשות לשאת בהן שכם אחד עם כל השאר, ועם זאת נפש מכונסת פנימה, שומרת עיקרים שלה וקשובה להם. עם שמות־החמדה של האומה ועם גנזי יגונה וגאולה יהיה שמור גם ספר אביעזר. את, אשר גם פני האב, צופות בך מתוך ספר זה, יחד עם פני הבן, הלא את שניהם את נושאת בלבבך, עם שאר אוהבים ושומרי זכר, עם אחות ואח וחברים. וכל מה שסופר בדפי־ספר זה, עם כל מה שנשאר אלם, הלא יהיה חרות על לוח לבם של העם והארץ הזאת.

מכבדך ודורש שלומך,

**נתן אלתרמן**

לאהובה הלוי-לוין, אם בישראל, —

לקראת הכבוד והכוונה שעמה אני כותב אליך
שורות אלו, שהוא מעבר לכל מה שנאמר בציבור
הדברים הללו, כפי שסיפר אביטל בנך. מה מרשימה
הבגרות הנשקפת מתוך הדברים, כמה קצר אך
כמה רב-פנים הוא פרק-חיים זה אשר נקטע
בעוד השחר פרוש עליו. עוד הוא פרק של ראשית
ועם זה הוא שלמות כה טבעית אך גם מורכבת
בצניעה, בהתאבקות על טעמי אנושות עתיקה
עם חיות נעורים, של נפש שמחה אל עולם ולא
אדם, אל חובות עצמן הקשות ושאלת בכין שלם
אנכי עם כל השאלות, ועד כדי נפש מתנפשת
פנימה, שומרת עיקרים שלה וקשורה להם. עם ניתוח
המחשבה של האומה ועם גאון ימינו ומאורע יהיה
שמור גם שמו אביטל, ואת, אשר גם פני האדם,
ביסוס רק מתוך ספר זה, יחד עם פני הבן, הלא
את שנינו את נשמות בלבבך, עם שאר אוהבים ושומרי
כבוד, עם אחות ואם וחברים. וכל מה שסופר בדפי-ספר
זה, עם כל מה שנשאר אתם, הלא יהיו חרות על לוח
לבם של עם ובארץ הצבאות.

מכבדך ומוקירך מאוד,
נתן אלתרמן

תל-אביב
17.2.70

**ראש הממשלה**

ירושלים, י"ד באדר א' תש"ל
20 בפברואר 1970

לכבוד
הגב' אהובה הלוי-לוין
רחוב מטודלה 7
<u>ירושלים</u>

גב' הלוי-לוין היקרה,

קבלתי את מכתבך מיום כ"ה בשבט תש"ל בצרוף החוברת שהוצאת לאור לזכרו של בנך אביעזר זכרונו לברכה שנפל במערכות ישראל ברמת הגולן.

אני אסירת תודה לך על ששלחת אלי את החוברת ממנה יכולתי ללמוד על הכשרונות המצויינים והתכונות הנעלות שבהן ניחן בנך היקר. הבית ספוג המסורת היהודית והאוירה התרבותית שבה נתחנך, ואביו הדגול יצחק הלוי-לוין ז"ל שהיה מקור לא אכזב של השראה והכוונה עצבו ללא ספק את אופיו של אביעזר ועשאוהו לבן נאמן לעמו, אמון על ערכי המסורת השרשית שלא נטש את התורה גם בימים שנאלץ להחזיק בשלח.

טוב, איפוא, עשו חבריו שהציבו לאביעזר ז"ל יד בחוברת צנועה המקפלת בין דפיה את רוחו. טוב יהיה גם כך אם רבים מבני הנוער שלא הכירו את בנך המנוח יקראו אף הם בחוברת ויתחנכו לאורה כדי שימשיכו בדרכו של אביעזר.

אני יודעת שמכתבי זה לא יוכל לנחמך ביגונך, בעיקר שכאבך כפול לאחר שאיבדת גם את בעלך יצחק הלוי-לוין ז"ל שלבו נדם אף הוא לאחר אבדן הבן. אם אין נחומים בפי הרי שישנה לי בקשה אליך: בקשה שתתחזקי ותתגברי על הכאב תוך ידיעה כי הקרבן הגדול שנתת לא היה לשווא וכי כלנו עמך.

בברכה נאמנה,

גולדה מאיר

גולדה מאיר

# הלוי־לוין אביעזר

*__הלוי־לוין אביעזר (אבי)__ בן יצחק ואהובה. נולד ביום ד׳ באדר תש״ח (13.2.1948) בירושלים.*
*למד בבית־הספר היסודי מעלה ובישיבה התיכונית נתיב מאיר. שנה אחת למד בישיבה הגבוהה כרם דיבנה.*
*נפל בעת מילוי תפקידו ברמת־הגולן ביום י״ב בשבט תשכ״ט (31.1.1969).*

## מבוא למספרים מרוכבים

מתוך עבודת־גמר במתמטיקה כיתה י״ב

### הקדמה

שני הפרקים הנכללים במבוא מטרתם להציג את הצורך במספרים מרוכבים מבחינה פיסיקלית ומתמטית.

ראש־הפרק הראשון, המוקדש לחשיבות הווקטורים בפיסיקה, יציג מחד את החשיבות הרבה של התיאור הגרפי של כוחות ומאידך את הליקוי בחישוב כוחות ע״י ווקטורים, דבר המביא בעקבותיו את קביעת הסימן החדש של ווקטורים, סימן המאפשר חישוב קל ונוח של מערכות עם כוחות רבים ושונים. כן יהווה ראש פרק זה בסיס להבנת האנלוגיה בין התיאור הווקטורי והמספר המרוכב.

ראש־הפרק השני הדן בצורך במספרים מרוכבים מבחינה מתמטית, יראה את הצורך בהרחבה נוספת של מושג ה״מספר״, כדי לפתור משוואות וביטויים חסרי פתרון ומשמעות לולא ההרחבה הנ״ל.

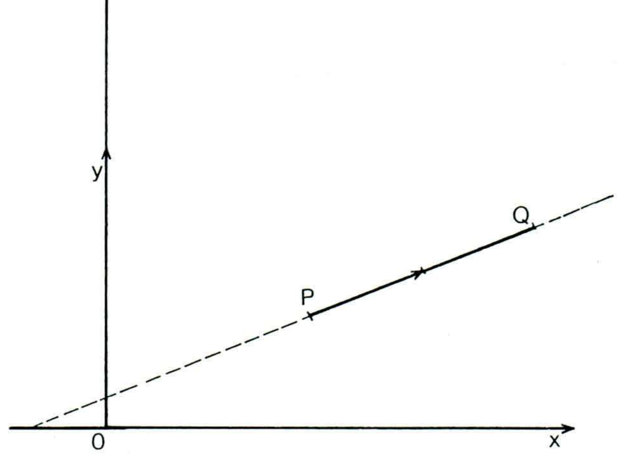
## חשיבות הווקטורים בפיסיקה

### א. הווקטור מהו?

וקטור הוא תיאור גרפי של כוח או של מהירות; הוא מתאר את מהירותו של גוף או את הכוח המחולל את שינוי מצבו של הגוף.

הווקטור הוא אם כן, גודל פיסיקלי ולכן הוא משמש במיוחד את ענף הפיסיקה, ובפרט את המכניקה.

הווקטור מציין כוח בכך שהוא ממחיש את גודלו, כיוונו ומגמתו. גודלו של כוח נקבע ע״י אורכו, לפי קנה־מדה קבוע. כיוונו נקבע ע״י הזווית שיוצר הווקטור, או קו פעולתו של הווקטור עם ישר אחר הקבוע במישור (נוהגים לקבוע את הציר האופקי כישר הקבוע במישור). מגמתו של הכוח נקבעת לפי מגמת הווקטור ומצויינת ע״י ראש החץ בתיאור הגרפי של הכוח ואמנם וקטור (VECTOR) היא מלה ברומית שתרגומה לעברית הוא חץ.



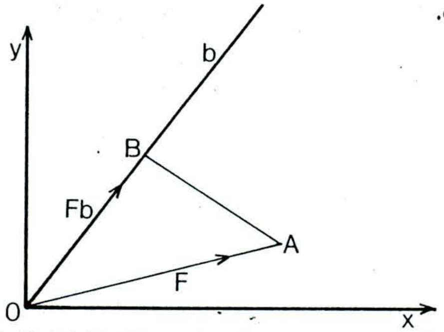

### ב. תכונות הווקטור

(1) ווקטור, המתאר כוח הפועל על גוף צפיד או מהירות שבה נע גוף, אינו תלוי בנקודה האחיזה שלו.

(2) בכיוון מאונך לווקטור אין כל רכיב.

״רכיבים״, פירושם פעילויות שונות בכיוונים שונים של הכוח. דהיינו: פירוקו של הכוח בכיוון שונה מקו פעולתו של הכוח.

לדוגמה: אם כוח מיוצג ע״י ווקטור F, שמגמתו מ־O ל־A, אזי רכיבו של זה בכיוון ob הוא הווקטור $\overline{OB}$, כאשר הנקודה B היא נקודת חיתוך האנך, המורד מהנקודה A לישר ob.




הווקטור F יוצר עם רכיבו Fb זווית α. רואים אם כן, כי הזווית α אינה יכולה להיות $\alpha = \pi/2$, שהרי: המשולש OBA הוא משולש ישר זווית

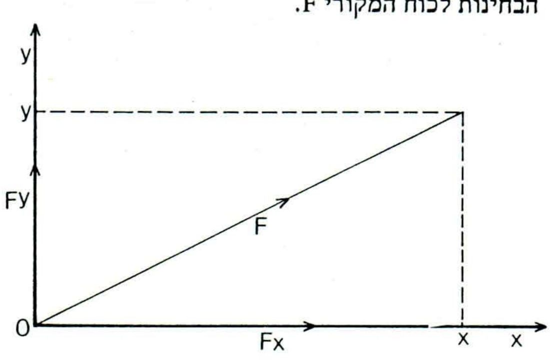
$\therefore Fb = F\cos\alpha$

אם $\pi/2 = \sigma$

אזי $Fb = 0$.

(3) כל כוח ניתן להמיר ברכיביו ישרי הזווית אם נקבע במישור שני צירים ox ו־oy, המאונכים זה לזה ובנקודת הראשית O, היינו: בנקודת חיתוכם נבנה וקטור F. אזי על שני הצירים האלה נקבל את רכיביו של F: $F_x$ ו־$F_y$ בהתאמה.

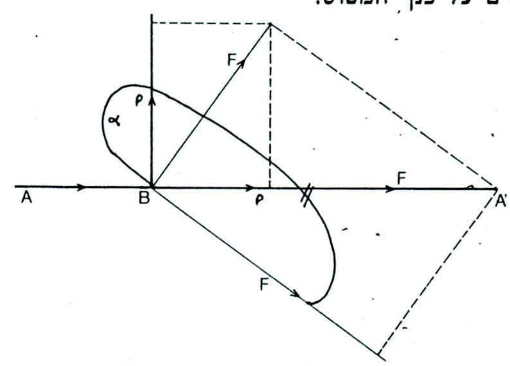
לווקטור $F_x$ אין רכיב בכיוון $O_Y$ וכן להיפך ל־$F_Y$ אין רכיב בכיוון $O_x$. יוצא איפוא, שלכוח F אין עוד רכיבים על ox ו־oy. משמעותה הפיסיקלית של עובדה זו היא, כי שני הכוחות $F_x$ ו־$F_y$ הפועלים יחדיו שקולים מכל הבחינות לכוח המקורי F.



### ג. דוגמה לשאלה הנפתרת ע״י ווקטורים

הווקטורים משמשים אחת מאבני היסוד לפיתוח הפיסיקה התיאורתית, ואת שימושם הרחב ניתן לראות ע״י דוגמאות רבות ושונות.

דוגמא יפה לכך היא חישוב כוחות העילוי והגרר, הפועלים על כנף מטוס והניתנים לחישוב בצורה קלה ומדוייקת להפליא בעזרת ווקטורים. לפנינו חתך כנף־מטוס α שבאמצעות מנוע המטוס פועלת עליה זרימה של אוויר (המדובר, בזרימה סדירה או זרימה למינרית) לאורך קו־הפעולה AB בכוח F. הכוח F ניתן להמרה ברכיביו ישרי־הזווית (תכונה (3)) — F′ ו־F″, כך שפעילותו של הרכיב F′ תהיה לאורך הכנף. דהיינו, הכוח F מחליק על־פני הכנף ואינו משפיע עליה (כמעט) ואילו F″ ניצב ל־F′ בנקודה B (ראה ציור 4). גם את הכוח F″ ניתן להמיר ברכיבים ישרי זווית P ו־P′, כשהכוח P לאורך קו הפעולה AB והכוח P′ ניצב לו בנקודה B. הכוח P הוא כוח הגרר, המושך, כביכול, את המטוס אחורנית, והכוח P′ הוא כוח העילוי. לפי שני כוחות אלה והיחס ביניהם ובין כוח המנוע ומשקל המטוס נקבעת תנועתו של המטוס. אנו רואים אם־כן את חשיבות התיאור הווקטורי של הפרדת כוחות. בעזרת הפרדה זו אנו יודעים בדיוק את גודלם, כיוונם ומגמתם של הכוחות הפועלים על כנף המטוס.




### ד. חשיבותם של הווקטורים

(1) הווקטור מביע בקיצור ובדיוק נמרץ את כל התכונות שאנו חייבים לציין בתיאור הכוח הפועל על גוף. דהיינו: גודל, כיוון ומגמה. אילולא התיאור הגרפי של כוח, היה צורך להאריך בתיאור הכוח, ואריכות יתרה פוגמת בבהירות.

(2) חישוב הפרדתם והרכבתם של כוחות ניתן להיעשות אך ורק באמצעות ווקטורים משני טעמים:

1) הדבר קשור בבניות ובצורות גיאומטריות של כוחות (מקבילית הכוחות וכו׳) ודבר זה ניתן להתבצע ע״י המחשת קווי הפעולה של כוחות וגודלם באמצעות ווקטורים.

(2) חישוב ניתן להיעשות רק בצורה הפורמלית — צורת נוסחה או גודל מתימטי. אחרת, הכוח היה ניתן לתיאור רק במלים, כגון: ״כוח של 10 ק״ג פועל בכיוון α מעל לאופק הימני״ ובעזרת ביטוי כזה לא נוח לחשב.

### ה. הצורך בסימן מתמטי לווקטורים

הווקטורים אמנם הם מכשיר נוח ויעיל, אך השימוש בהם מוגבל; שיטת החישוב בעזרת וקטורים דורשת מעצם טבעה שימוש בציורים רבים. אם נדרש לתאר כוחות רבים ופעולות שונות ביניהן, יצור הדבר קשיים גרפיים.

הווקטור הוא התיאור הפורמלי של כוחות, ומהירויות של גופים ־ולמרות זאת הוא מוגבל לתחום הפעולות החשבוניות שאינן בעלות איברים רבים.

תפקיד זה לקביעת גדלים וסימנים חדשים שיתארו את הכוח מכל בחינותיו, נפל בנחלתה של המתמטיקה. **סימנים חדשים אלה נקראים — המספרים המרוכבים.**

### ו. הווקטור כמספר מרוכב

אחת משיטות הביסוס האריתמטי של הרחבת מושג המספר מתחום אחד של מספרים לתחום רחב יותר היא שיטתו של ו. ר. המילטון (W. R. Hamilton). שיטה זו מבוססת על כך שהמספרים מן התחום הרחב הם למעשה זוגות המספרים מן התחום הקודם. כך, למשל, מתוארים המספרים שהם הרציונליים, לפי שיטתו של המילטון, כזוגות מסודרים (x,y), כאשר x ו־y מספרים שלמים כלשהם לגבי זוגות אלה הוסדרו הגדרות שוויון, חיבור, כפל והעלאה בחזקה, שלפיהן נוסחו כל החוקים הפורמליים של החשבון. תחום המספרים השלמים משמש כתחום חלקי של קבוצת הזוגות — המספרים הרציונליים. אף כאן, להרחבת מושג ה״מספר״ מתחום המספרים המעשיים לתחום חדש, נקבע שהמספרים החדשים — המספרים המרוכבים — יתוארו כזוגות מסודרים (x,y) של המספרים הממשיים (זוג מסודר יוגדר כזוג שיש חשיבות לסדר הסימנים שבו, כלומר: הזוג המסודר — (x,y) שונה מן הזוג המסודר (y,x)

אך בזוגות המספרים הממשיים משתמשים אנו גם כסימנים ווקטוריים, ואת פעולות החשבון שלהם הגדרנו לפי התיאורים ההסתכלותיים של הווקטורים. לכן, קביעת זוגות המספרים הממשיים כמספרים מרוכבים, וקיום הגדרות פעולות החשבון של הסימנים הווקטוריים עבור התחום החדש — תחום המספרים המרוכבים — יוצרת ממילא את הקשר ההדוק בין המספר המרוכב לווקטור. ואכן, לקשר זה שימוש רחב מאד, הוא מקל עלינו חישובים מסובכים בווקטורים, ובפרט אחר שינוי סימנו של המספר המרוכב [x,y] לסימן $x+y_i$ (כפי שנראה להלן). לפי ביסוס אריתמטי זה חייבים אנו להראות שתחום המספרים הממשיים אכן מהווה קבוצה חוקית בתחום המספרים המרוכבים. דהיינו: (x,o) [x — מספר ממשי כלשהו] עבור כל פעולות החשבון, דבר שאף הוא נראה בהמשך ראש הפרק הזה בשיטת ביסוס נוספת של המספרים המרוכבים, שיטתו של קושי Cauchy, שתופיע להלן, לקראת סוף עבודה זו.

$$\pm i = \sqrt{-1}$$

כמקרה פרטי של הכפל יהיה:

$$i^2 = (0+1i)(0+1i) = (00-1) + (0.1+1.0) = -1$$

רואים א״כ ש־ $i^2 = -1$

לכן $\pm i = \sqrt{-1}$

לכן אין לראות את הביטוי $\pm i = \sqrt{-1}$ כהגדרה, אלא כביטוי הנובע מפעולה חשבונית מסוימת שהוגדרה לעיל.

נקודת המוצא היתה יכולה להיות אחרת: תחילה היינו מגדירים: $\pm i = \sqrt{-1}$ ואז לא היתה נחוצה הגדרה לפעולת הכפל: היא היתה נפתרת לפי דרך פתיחת הסוגריים במספרים ממשיים:

$$\begin{aligned}(x+yi)(x'+y'i) &= (xx+i^2yy')+(xy'i+yx'y) = \\ &= (xx'+(-1)yy')(xy'+yx')i^4 \\ &= (xx'-yy')(xy'+yx')i =\end{aligned}$$

לביטוי $\sqrt{-1}$ אין משמעות מתמטית בתחום המספרים הממשיים. עתה, אחר הרחבת מושג ה״מספר״ לתחום חדש, רחב יותר של מספרים, יש לביטוי $\sqrt{-1}$ משמעות מתמטית

ע״י הסימן Ii. מקורו של הסימן i הוא מהמילה הרומית imaginarius שפירושו דמיוני — מדומה. בתקופה שחלה הרחבה זו של המספרים המרוכבים ראו המתמטיקאים בביטוי זה סמל מופשט ודמיוני וקבעו לו את הסימן i, ואמנם רבים חלקו על הרחבה זו של המושג מספר, אך עתה נתקבלה הרחבה זו על כל חוגי המתמטיקה (כשלבסוף אף החולקים על ההרחבה, לא מצאו תחליף לה, אלא באמצעות הסימן $\sqrt{-1} = \pm i$). הרי ש־i הוא מספר ככל שאר המספרים המרוכבים.

הסימן i הוא תחליף לסימן הווקטורי [0.1] כלומר, i הוא יחידת האורך של הציר האנכי oy. היות ש־i נקבע בתחילה כדמיוני, הרי שהציר oy ש־i מהווה את יחידותיו, אף הוא יקרא הציר הדמיוני במישור.

לדבר זה תהיה חשיבות רבה בהמשך הנושא, בתיאור הגיאומטרי של המספרים המרוכבים.

## התיאור הגיאומטרי של מספרים מרוכבים (מישור גאוס).

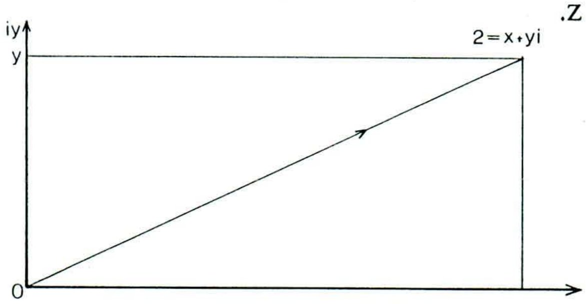
הווקטור נקבע ע״י זוג המספרים הממשים (x,y) אך גם באמצעות הווקטור נקבעים מספרים אלה. יחס זה של הדדיות בין התיאור של וקטור ע״י זוג המספרים, ולהיפך — תיאור זוג המספרים ע״י הווקטור, קיים גם לגבי המספרים המרוכבים.

לתיאור הגיאומטרי של המספרים המרוכבים נשתמש במערכת הצירים הקרטזית: הציר ox האופקי והציר oy האנכי.

על הציר האופקי ox נמצאים כל המספרים הממשיים. חלוקת הציר oy תהיה לעומת זאת ליחידות אורך שיוגדרו כ־i, היינו: יחידת המספרים הדמיוניים הטהורים. לכל נקודה במישור מותאם זוג מספרים ממשיים (x,y) שהם הנותנים את שיעור הנקודה במערכת הקרטזית שציריה מזדהים עם הצירים שקבענו.

לנקודה זו — (x,y) — נתאים את המספר המרוכב E = x+yi.

הווקטור המחבר את הראשית (o,o) ואת הנקודה z אף הוא נקבע ע״י סכום שני הרכיבים x ו־iy על הצירים ox ו־oy בהתאמה (ראה ציור 18). לכן מתואר ווקטור זה ע״י המספר המרוכב z, ולהיפך — גם הווקטור עצמו מתאר את המספר Z.




מישור זה, שכל נקודותיו מתארות מספרים מרוכבים ושציריו: ox — המכיל את כל המספרים הממשיים ו־oy שנקודותיו מתאימות לכל המספרים הדמיוניים — טהורים, נקרא מישור גאוס (C. F. Gauss) או מישור המספרים המרוכבים.

אמנם גאוס, שלא כשיטת הביסוס של המילטון, ביסס את המספרים המרוכבים ע״י התאמתם הישרה לווקטורים או לנקודות במישור. הצדקת המספרים המרוכבים היתה תלויה בכך שיכולנו לומר: לכל יחס בין מספרים מרוכבים מתאים יחס מסויים בין ווקטורים ולכן, אילו היתה סתירה ביחס בין מספרים מרוכבים היתה צריכה להיות סתירה ״מקבילה״ גם בין ווקטורים. אך היות שהווקטורים עם פעולות החשבון ביניהם הם תיאורים גרפיים, הסתכלותיים ואינם ניתנים לסתירה, לא תהיה סתירה גם בתחום המספרים המרוכבים.

התאמה זו בין הווקטור לבין המספר המרוכב, ללא גודל מתמטי מקשר (כפי שעשה המילטון) אינה יעילה די הצורך והיא נוגדת את אופיה העיוני של המתמטיקה.

אם נראה את הווקטורים כתיאורים גרפיים של כוחות ומהירויות, היינו: עצמים שאינם ״ברי משוש״ ביקום, אזי ביסםנו ענף מתמטי — תורת המספרים המרוכבים — על ״עצמים״ חיצוניים שאינם מתאימים לאופיה העיוני של המתמטיקה. וגם אם נראה את הווקטורים כ״עצמים״ מתמטיים, היינו עצמים הלקוחים מן הגיאומטריה העיונית, בכל זאת עדיף לבסס את הגיאומטריה על תחום המספרים ולא את תחום המספרים על הגיאומטריה (עיין ״מבוא למתמטיקה״ חלק ב׳, פרופ׳ א׳ פרנקל, חלק חמישי: בעיות ושיטות בגיאומטריה, פרק ו׳, מעמ׳ 189 ואילך). מתוך נימוקים אלה, נימוקים שגאוס אמנם לא הרגיש בהם, יש להעדיף את הביסוס האריתמטי ״הטהור״ של המילטון המקשר את המספרים המרוכבים והווקטורים ע״י הסימן הווקטורי [x,y] המשרת את שניהם ומשמש מחד לציון הווקטור ומאידך כזוג מספרים ממשים להרחבת מושג המספר (עיין לעיל עמ׳ 16).

ביסוס מתמטי נוסף של קושי ע״י הקונגרואנציה בין פונקציות יופיע להלן (עמ׳ 52).

הגדרות

1) אנך הווקטור המתאר את המספר המרוכב z=x+yi יקרא מודולוס, או: הערך המוחלט של המספר המרוכב, זאת אומרת: $|z| = \tau = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) הזווית o, שבין הציון החיובי של הציר האופקי ox ובין הווקטור z (עיין ציור לעיל) במגמה נגד כיוון השעון תיקרא — הארגומנט של המספר המרוכב — z וסימנה arg z=0 — מוגדר 38 לכפולה של zπ (רדיאנים) בלבד. כלומר, יחד עם θ מסוים גם כל הזוויות — θ+2 JIM (K = 0±1; ±2; ±3 ±... ±n) משמשות כארגומנט של z.

שוויונים, חיבורם ומכפלתם של מספרים מרוכבים, תואר במישור גאוס בדיוק כפי שוויונם, חיבורם מכפלתם של ווקטורים.

כמקרה פרטי נציין את מכפלת המספר המרוכב z=x+yi ב־i, דהיינו: (x+yi)i = -y+xi

## ב) מספר השורשים המרוכבים למשוואה ממעלה n

נשאלת השאלה: עתה, כשאנו משתמשים במספרים המרוכבים כשורשי המשוואה הריבועית, מנין לנו, שיהיו רק שני מספרים מרוכבים כשורשים למשוואה. אולי יותר? טענה זו אינה נכונה ואי־נכונותה ניתנת להוכחה בקלות ע״י המשפט באלגברה.

למשוואה אלגברית ממעלה n יש לכל היותר n שורשים מרוכבים שונים. ואומנם, נוכיח את נכונות המשפט עבור משוואה ממעלה n ולצורך סתירת הטענה שלעיל, יוכל הקורא להוכיח עבור n=z.

כדי להוכיח משפט זה נוכיח תחילה את המשפט:
אם a הוא שורש המשוואה ∫(z)=0, כאשר z=x+yi, אזי

הפולינום $\delta(z)$ מתחלק בגורם "הקווי" $(z-a)$.

**הוכחה:** אם a שורש המשוואה $\int(z)=0$, אזי: $\int(a)=0$

נחלק את $\int(z)$ בגורם "הקווי" $(z-a)$), ונקבל:

$$\int(z) = (z-a)\cdot h(z)+\gamma$$

$\gamma$ הוא גודל (מספר) קבוע, מפני שמעלת $\gamma$ קטנה ממעלת $(z-a)$. בתיתנו בנוסחה האחרונה ל־$z$ את הערך $a$, נקבל לפי הנתון $\int(a)=0$, וגם הגורם הקווי $(z-a)$ הוא 0. היינו:

$$\int(a) = (z-a)\,h(z)+\gamma \longrightarrow 0 = 0hz+\gamma.$$

דבר זה גורר: $\gamma = 0$. קבלנו איפוא:

$$\int(z) = (z-a)\cdot h(z)$$

מ.ש.ל.

בעזרת משפט זה נוכיח את המשפט: למשוואה אלגברית ממעלה n, יש לכל היותר n שורשים מרוכבים שונים:

**הוכחה:** נניח, שלמשוואה:

$$(a_0\neq 0);\ \int(x) = a_0x^n+\dots+a_n=0$$

יש לפחות n שורשים מרוכבים שונים —

$$z_1; z_2; \dots; z_n$$

לפי המשפט הקודם רואים אנו:

$$\int(x) = (x-z)\cdot\int_1(x)$$

והואיל וגם $z_2$ הוא שורש שורש של המשוואה:

$$\int(x)=0,$$

כלומר:

$$\int(z_2)=0,$$

ולכן:

$$0=(z_2-z_1)\cdot\int(z_2)$$

אך כיוון ש־$z_2 \neq z_1$ [לפי הנתון], לכן

$$\int_1(z_2)=0.$$

זאת אומרת: $z_2$ הוא שורש המשוואה:

$$\int_1(x)=0.$$

לפי המשפט הקודם קיים ג"כ:

$$\int_1(x) = (x-z_2)\cdot\int_2(x),$$

לכן:

$$\int(x)=(x-z_1)(x-z_2)\cdot\int_2(x).$$

ע"י המשך תהליך זה נקבל אחר הצעד ה־$x-n$

$$\int(x) = (x-z_1)(z-z_2)\dots(x-z_n)\int_n(x)$$

ולכן:

$$\int(x)=a_0x^n+\dots+a_n= \\ =(x-z_1)(x-z_2)\cdot\dots\cdot(x-z_n)\int_n(x)$$

האיבר בעל המעריך הגדול ביותר באגף שמאל של השוויון הוא $a_0x^n$; $(a_0\neq 0)$.

לכן: האיבר המתאים באגף הימני של השוויון [אחר שנכפיל את כל הגורמים — $(x-z_1)(x-z_2)\dots(x-z_n)$] אף הוא — $a_0x^n$. דבר זה גורר:

א. מעלת $\int_n(x)$ קטנה ממעלת המחלק $(x-z_n)$; [כאשר $n=1; z; \dots; n$]. כלומר: $\int_n(x)$ הוא בעל המעריך — 0.

ב. ערך המספר הקבוע $\int_n(x)$ שווה ל־$a_0$ ושונה איפוא מ־0.

קיבלנו את הצורה:

$$\int(x) = a_0x^n+\dots+a_n = a_0(x-z_1)(x-z_2)\cdot\dots\cdot(x-z_n) \qquad (1)$$

עתה יהי $z_{n+1}$ מספר מרוכב, השונה מ־n המספרים המרוכבים — $z_1; z_2; \dots; z^n$.

עלינו להראות ש־$z_{n+1}$ איננו שורש של המשוואה $\int(x)=0$. נוכיח זאת בדרך השלילה:

נניח ש־$z_{n+1}$ הוא שורש המשוואה $\int(x)=0$; כלומר — $\int(z_{n+1})=0$.

לפי (1) נקבל:

$$\int(z_{n+1}) = a_0(z_{n+1}-z_1)(z_{n+1}-z_2)\dots(z_{n+1}-z_n)$$

האגף הימני הוא מכפלה של מספרים מרוכבים השונים מ־0. לכן:

$\int(z_{n+1})\neq 0$. דהיינו: $z_{n+1}$ אינו שורש המשוואה.

מ.ש.ל.

## ג. המספרים המרוכבים אינם שומרים על קיום חוקי הסדר.

תוך כדי הרחבת מושג ה"מספר" לתחום המספרים המרוכבים, הצענו להשאיר בתוקפם את כל חוקי החשבון של חיבור וכפל. לעומת זאת, נאלצנו לוותר על קיום חוקי הסדר, שיש להם תוקף במערכת המספרים הממשיים.

**חוקי הסדר הם:**

1) לכל מספר a קיים אחד ורק אחד מהמצבים —

$$a<b;\ a=b;\ a>b$$

2) חוקי המונוטוניות הקושרים את סדר הפעולות בחשבון:

א. אם $b<c$ אז — $a+b<c+a$.

ב. אם $a>0$ ו־$b<c$ אזי:

$$a\cdot b<ca$$

ג) עקרון ארכימדס הקושר את יחס הסדר בחיבור: אם a ו־b חיוביים ו־$a<b$ — אזי ישנו מספר טבעי n, כך ש־$a+a+\dots+a$ (n פעמים) גדול מ־b.

תכונות אלה של המספרים הממשיים אינן יכולות להתקיים בתחום המספרים המרוכבים. עלינו לוותר א"כ על מספר תכונות סדר ולקיים את האחרות.

לדוגמא: לתת מקום לעקרון ארכימדס ולסדר את המספרים המרוכבים לפי ערכם המוחלט. כלומר: לראות את $z_1<z_2$ אם — $(|z_1|<|z_2|)$. ע"כ לא יישמר חוק הסדר הראשון, שהרי שני מספרים מרוכבים בעלי ערך מוחלט שווה וכיוונים שונים (לפי התיאור הטריגונומטרי של המספרים המרוכבים) אינם שווים ביניהם ולפי הגדרתנו אין האחד קטן מהשני. יתר על כן: לפי הגדרה זו קיים מספר מרוכב קטן ביותר. דהיינו, מספר שערכו המוחלט (שהוא תמיד חיובי) הוא 0. כלומר: המספר המרוכב $0+0i$ הוא המספר הקטן ביותר. דבר זה עומד בניגוד לסדר המספרים הממשיים, הרציונלים והשלמים. שביניהם אין מספר קטן מכל שאר המספרים. (דוגמה שנייה תופיע להלן בראש הפרק: "הבעיה של הרחבה נוספת למושג "המספר").

שילמנו איפוא מחיר מסוים עבור ההרחבה, אבל הפירות מרובים.

# פתרון משוואה ממעלה ראשונה, שנייה ושלישית עם מקדמים מרוכבים.

## פתרוני הצורה הכללית של משוואה ממעלה שלישית עם מקדמים מרוכבים

הצורה הכללית למשוואה ממעלה שלישית עם מקדמים מרוכבים היא:

$$(a+Ai \neq 0); (a+Ai)z^3 + (b+Bi)z^2 + (c+Ci)z + (d+Di) = 0$$

משוואה זו שמקדמיה מרוכבים אפשר להביא לצורה $z^3+mz+n = 0$; (כאשר m ו־n מספרים מרוכבים). נראה זאת להלן:

את המקדמים $a+Ai$; $b+Bi$; $c+Ci$; $d+Di$; נסמן — $a_1$; $b_1$; $c_1$; $d_1$; בהתאמה. הצורה הכללית היא א"כ:

$$(a_1 \neq 0)\ a_1z^3 + b_1z^2 + c_1z + d_1 = 0$$

נחלק ב־$a_1$ ונקבל כצורה כללית וקבועה של משוואה ממעלה שלישית:

$$z^3 + b_1z^2 + c_1z + d_1 = 0$$

יהי $z = x+t$. נקבל:

$$(x+t)^3 + b_1(x+t)^2 + c_1(x+t) + d_1 = 0$$

אחר פתיחת הסוגריים וסידור הביטוי לפי חזקות יורדות של x נקבל:

$$x^3 + x^2(3t+b) + mx + n = 0$$

m ו־n הם מספרים מרוכבים המכילים את המקדמים המרוכבים: $b_1$; $c_1$; $d_1$, וכן את המספר t.

אפשרות בחירת הערך של t היא בלתי־מוגבלת; נדרוש אפוא, ש־$t=b/3$. ז"א: $3t+b_1=0$. כך ייעלם הביטוי המכיל את $x^2$ והמשוואה תקבל את הצורה:

$$x^3 + nx + n = 0$$

לשם נוחיות וכדי להימנע משברים בהמשך הפיתוח, נציב:

$$m = 3p;\ n = 2q.$$

נוכל א"כ לרשום, ללא הגבלת הכלליות, משוואה ממעלה שלישית עם מקדמים מרוכבים בצורה:

$$[n=(n+Nc);p=(p+Pi)]\ z^3 + 3pz + 2q = 0$$

א) מצב בו $P=0$; $N=0$

יהי $a + b = z$ (a ו־b מספרים ממשיים כלשהם);

אזי — $(a+b)^3 + 3p(a+b) + 2q = 0$

אחרי פתיחת הסוגריים וסידור הביטוי לפי חזקות יורדות נקבל:

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) + 3p(a+b) + 2q + 0$$

אנו רשאים להטיל קשר נוסף על a ו־b מלבד הקשר $a+b=z$ (ללא הגבלת הכלליות). קשר זה הוא — $ab+p=0$. כלומר $a = -p/b$.

ע"י הנחה זו קיבלנו שתי משוואות:

$$\begin{cases} a^3+b^3 = -2q \\ ab + p = 0\end{cases}$$

נרשום זאת בצורה קצת אחרת

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = -2q \\ a^3 \cdot b^3 = -p^3\end{cases}$$

עתה, ניתן לראות בקלות ש־$a^3$ ו־$b^3$ הם שורשי המשוואה הריבועית —

$$k^2 + 2qk + p^3 = 0$$

פתרונות משוואה זו יתנו את $a^3$ ו־$b^3$:

$$a^3 = -q + \sqrt{q^2+p^3}$$
$$b^3 = -q - \sqrt{q^2+p^3}$$

ומכאן —

$$z = (a+b) = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2+p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2+p^3}}$$

[ע"י העלאת המשוואה $ab=-p$ בחזקת 3 הוכנסו פתרונים חדשים למשוואה. מצב דומה מתהווה כאשר במקום $x=1$ רושמים $x^2=1$ שאז נוסף הפתרון $x=-1$. אך את הפתרונים שנוצרו ע"י העלאת המשוואה בשלישית אנו מנפים, כיוון שדרוש שהפתרונים יקיימו לא — $a\cdot b=-p$ אלא גם: $a+b=x$.]

במקרה זה, שהמקדמים ממשיים, יש לנתח את אפשרויות הפתרונים:

(א) $q^2 + p^3 > 0$; במקרה זה יש שורש ממשי אחד אך ישנם שני שורשים מרוכבים נוספים כפי שנראה להלן.

(ב) $q^2 + p^3 = 0$; במקרה זה ישנם שלושה שורשים ממשיים $x = 2\sqrt[3]{-q}$, וכן שני שורשים שווים $x_{2,3} = \sqrt[3]{q}$.

(ג) $q^2 + p^3 < 0$; למרות שהסימן מתחת לשורש של פתרון ממעלה שלישית הוא שלילי, בכל זאת יהיו למשוואה 3 שורשים ממשיים! [אין כאן המקום להרחיב בזה]

ב) במקרה ש־$(N; P) = 0$, אזי:

(1) מצב בו יהיה שורש ממשי:

אם $P \neq 0$ אזי השורש הממשי הוא $-N/3p$ ו־

$$N^3 + 2\tau pP^2N - 2\tau P^3n = 0$$

(2) מצב בו יהיו השרשים דמיוניים טהורים:

1) אם $P \neq 0$ אזי השורש הדמיוני הטהור יהיה $ni/3p$ ואזי —

$$n^3 2\tau P^3 n - 2\tau P^3 n = 0$$

2) אם $p = 0$ אזי גם $n = 0$ והשורש הוא $yi$, כאשר y נקבע ע"י המשוואה

$$y^3 - 3py - N = 0.$$

במקרה זה יכולים להיות שלושה שורשים דמיוניים טהורים.

(3) במקרה בו יהיו שורשים מרוכבים צמודים:

נניח, ששורשים אלה יהיו $x+yi$ ו־$x-yi$; היות שהסכום של שלושת השורשים הוא 0, דבר שנראה להלן, לכן, השורש השלישי חייב להיות $-2x$.

מהיחס בין מקדמי המשוואה ובין השורשים אנחנו מסיקים ש־

$$y^2 - 3x^2 = 3(p + Pi)$$
$$2x(x^2+y^2) = n + Ni$$

לכן, $p+Pi$ ו־$n+Ni$ חייבים להיות שניהם ממשיים.

## נכונות 'המשפט היסודי של האלגברה' עבור המספרים המרוכבים

**משפט:** אם נכון שלכל משוואה אלגברית, שמקדמיה כולם ממשיים, יש לפחות שורש אחד, ממשי או מרוכב, קיים אותו דבר גם במקרה הכללי: כלומר, אם המקדמים מרוכבים.

**הוכחה:** נניח, שאמנם כבר ידוע, כי לכל משוואה אלגברית בעלת מקדמים ממשיים, ישנו שורש (ממשי או מרוכב). הצורה הכללית של משוואה ממעלה n עם מקדמים מרוכבים כלשהם היא —

$$0_0 \neq 0;\ \int(x) = a_0x^n + \dots + a_n = 0 \qquad (1)$$

במקום המקדמים $a_k$ $(k = 0;\ 1;\ 2;\ \dots;\ n)$, נרשם בצורה המפלה בין החלק הממשי והחלק הדמיוני:

$$a_k = c_k + id_k$$

נוכל אם כן לרשום את המשוואה לעיל בצורה:

$$c_0 + id_0 \neq 0;\ \int(x) = c_0x^n + \dots + c_n) + i(d_0x^n + \dots + d_n) = g(x) + ih(x) \qquad (2)$$

נסמן את כל מה שכתוב בסוגריים הראשונים ב־$g(x)$; וב־$h(x)$ את תוכן הסוגריים העוקבים; לכן, $g(x)$ ו־$h(x)$ הם שני פולינומים בעלי מקדמים ממשיים.

אם נכפול את $g(x)+ih(x)$ בביטוי הצמוד לו — $g(x)-ih(x)$ — נקבל:

$$[g(x) + ih(x)]\,[g(x) - ih(x)] = [g(x)]^2 + [h(x)]^2 \qquad (3)$$

אם נסדר את כל המחוברים שבתוך הביטוי שהתקבל לפי חזקות יורדות של x מתברר, שגם ביטוי זה, שנסמנו $F(x)$, הוא פולינום בעל המעלה zn; ובפרט — פולינום בעל מקדמים ממשיים. בהשתמשנו בהנחה שלכל משוואה בעלת מקדמים ממשיים, כמו $F(x)=0$, יש שורש (ממשי או מרוכב) $\gamma$ שמקיים: $F(\gamma)=0$, נקבל לפי (2) ו־(3):

$$0 = F(\gamma) = [g(\gamma) + ih(\gamma)]\,[g(\gamma) - ih(\gamma)] = \int(\gamma)[g(\gamma) - ih(\gamma)]$$

גם $\int(\gamma)$ וגם $g(\gamma) - ih(\gamma)$ הם מספרים מרוכבים, והרי בשדה המספרים המרוכבים מתאפסת המכפלה אך ורק אם לפחות אחד הגורמים הוא 0. לכן, אם

$$\int(\gamma) = 0$$

הצלחנו להוכיח שלמשוואה הנתונה

$$\int(x) = 0$$

ישנו שורש $\tau$, ואם לא, הרי קיים

$$g(\gamma) - ih(\gamma) = 0.$$

נתאר את המספר המרוכב בצורה

$$\tau = \gamma_1 + i\gamma_2$$

(במקרה ש־$\tau$ מספר ממשי, ז"א: $\gamma_2 = 0$, גורר השוויון:

$$g(\gamma) - ih(\gamma) = 0$$

מיד את השוויון:

$$g(\gamma) + ih(\gamma) = 0.$$

קל לראות, כי הערך הצמוד ל־

$$g(\tau_1 - \gamma_2 i) - ih(\tau_1 - \gamma_2 i) = 0$$

הוא —

$$g(\gamma_1 - \gamma_2 i) + ih(\gamma_1 - \gamma_2 i).$$

(מכאן — הגהה ב)

לפי (ב) זה שווה ל־$\int(\tau_1 - i\tau_2)$, הואיל והערך הצמוד ל־0 גם הוא 0, הרי ש־$\int(\tau_1 - \gamma_2) = 0$.

לשון אחר: גם במקרה השני שבו: $\int(\tau) \neq 0$ מצאנו שורש למשוואה: $\int(x) = 0$ — הוא השורש $x = \tau_1 - \gamma_2 i$.

מ.ש.ל.

נשאר לנו א"כ להוכיח, שיש שורש לכל משואה בעלת מקדמים ממשיים, ודבר זה נראה להלן ע"י הוכחת 3 משפטים.

(א) **משפט:** לכל משוואה אלגברית שמעלתה m אי זוגית, ישנו לפחות שורש ממשי אחד.

(ב) **משפט:** לכל משוואה אלגברית שמעלתה n זוגית, ושהאיבר הקבוע בה — $a_n$ בעל סימן הנגדי לסימן $a_0$, יש לפחות שורש חיובי אחד ושורש שלילי אחד.

(ג) **משפט:** לכל משוואה אלגברית שמעלתה n זוגית, ושמכפלת האיבר הקבוע $a_n$ והמקדם $a_0$ גדולה מ־0, יש שורש ממשי.

**משפט (א).**

**הוכחה:** על שתי עובדות מסתמכת ההוכחה:

1) תהיה $\int(x) = 0$ משוואה בעלת מעלה אי־זוגית n; אזי אצל ערכים הגדולים למדי של x יש סימן ההפוך לסימן ערכו של $\int(x)$ אצל ערכי x קטנים למדי (היינו: אצל כל x שערכו המוחלט גדול למדי).

נוכיח עובדה זאת: נניח, שהמקדם $a_0$ של $x^n$ הנו חיובי. נכתוב את $\int(x)$ בצורה

$$\int(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n =$$

$$= a_0x^n\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x_0}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right)$$

אם נגביל את ערכי x למספרים ממשיים בעלי ערך מחלט גדול למדי, הרי שהביטוי בסוגריים אחר הספרה 1 נמצא, למשל בין המספרים $\frac{1}{2}$ ו־$\frac{1}{2}$. שהרי המנות

$$\frac{1}{x};\ \frac{1}{x^2};\ \dots\ \frac{1}{x^n}$$

תקבלנה ערכים קרובים ל־0 לפי ההגדלה הנ"ל והמקדמים לעומת זאת —

$$\frac{a_1}{a_0};\ \frac{a_2}{a_0};\ \dots\ \frac{a_0}{a_0}$$

קבועים מראש ואינם תלויים בהגדלת ערכו של x. מכאן יוצא, שכל הביטוי המופיע בסוגריים מקבל ערך חיובי. רואים אם־כן, שסימן הפולינום $\int(x)$ כסימנו של $a_0x^n$. מכיון ש־n אי־זוגי, הרי סימן זה חיובי אצל ערכי x חיוביים ושלילי אצל ערכי x שליליים (כל זה קיים לפי הנחתנו ש־$a_0$ חיובי. אם $a_0$ שלילי, נקבל את המסקנה ההפוכה: $\int(x)$ שלילי עבור ערכי x גדולים, וחיובי אצל ערכי x קטנים שערכם המוחלט גדול).

מעובדה זו רואים אנו, שעבור x בעל ערך מוחלט גדול למדי יהיה האיבר הראשון שבפולינום $\int(x)$ האיבר המכריע, וכל שאר האיברים ואף סכומם טפלים יהיו לעומתו.

2) אם הפונקציה $\int(x)$ תקבל אצל ערך x מסויים (x=a) את הערך $\int(a)$ ואצל ערך אחר מסויים של x=b -x את הערך

$f(b)$, אזי $f(x)$ תקבל כל ערך בין $f(a)$ ל־$f(b)$ עבור ערך אחד של x הממלא את היחס — $a<x<b$ (עובדה זו שייכת לתורת הפונקציות הרצופות, ולכן לא נוכיח אותה עתה). אצלנו תקבל $f(x)$ ערך שלילי אצל ערכי x קטנים למדי, וערך חיובי אצל ערכי x גדולים למדי, לכן, על סמך התכונה הנ"ל ישנו לפחות ערך ממשי אחד של x, שאצלו תקבל $f(x)$ את ערך הביניים 0, הנמצא בין כל מספר חיובי לשלילי, כלומר: הואיל ול־$f(x)$ יש אצל $x=0$ הסימון של —

$$a_n = a_0 0^n + \dots + a_{n-1}0 + a_n,$$

תקבל $f(x)$ את הערך 0 בין הערך השלילי של x לבין הערך של — $x=0$.

אם $a^n > 0$; במקרה זה מתאפסת אפוא $f(x)$ עבור ערך שלילי ידוע של x.

אם $a^n < 0$; במקרה זה קיים מאותו נמוך שלעיל ערך חיובי של x המאפס את $f(x)$.

אם $a^n = 0$; במקרה זה יהיה 0 שורש המשוואה כפי שרואים לעיל.

מצאנו א"כ ערך ממשי של x, שעבורו מתאפסת $f(x)$. כלומר: יש שורש ממשי למשוואה

$$f(x) = 0$$

מ.ש.ל.

**משפט (ב).**

**הוכחה:** הוכחת משפט זה דומה בפרטיה להוכחת המשפט הקודם. נניח ש־$a > 0$. הואיל ו־n זוגי הרי ש־$a_0x^n$ חיובי, הן עבור ערכי x שליליים והן עבור ערכי x חיוביים. על פי עובדה 1) שבמשפט (א) רואים, ש־$f(x) > 0$ עבור ערכי x קטנים וגדולים למדי.

מאידך, עבור $x = 0$ נקבל $f(x) = a_n$, זאת אומרת: $f(x) < 0$. לכן קיים, לפי עובדה ב) משפט א), ערך שלילי המאפס את $f(x)$, וכמו כן ערך חיובי המאפס את $f(x)$. לשון אחר: יש לפחות שורש שלילי אחד ושורש חיובי אחד למשוואה הנתונה.

מ.ש.ל.

**משפט (ג).**

למשפט זה אביא את ההוכחה רק בקווים כללים ביותר כיוון שהיא ארוכה מאוד וחולשת על שטחים רבים באלגברה.

**הוכחה:** כדי להבטיח שורשים גם לכל המשוואות האחרות, מציגה הוכחה זו את מעלת המשוואה הנתונה בצורה — $n = z^\alpha \cdot m$, שבה מתאר m מספר אי־זוגי. את ערכי המעריך יש לסדר לפי גודל המעריכים — $\alpha$, ובמקרה שערכי $\alpha$ שווים — לפי גודלם של המספרים m.

כלומר, אם: $n_1 = z^\alpha m_1$ ו־$n_2 = z^\alpha m_2$

נקדים את $n_1$ ל־$n_2$ אם $\alpha_1 < \alpha_2$; אך במקרה $\alpha_1 = \alpha_2$ אם $m_1 < n_2$ אזי קודם $n_1$ ל־$n_2$, ולפי זה תיקרא המשוואה בעלת המעלה $n_1$ "נפתרת יותר בקלות" מהמשוואה בעלת המעלה $n_2$.

אחר מיון המעלות הזה נוכיח את משפט ג' ע"י אינדוקציה. נראה שלכל משוואה בת מעלה מסויימת n ישנו שורש, בתנאי שיש שורשים לכל המשוואות הנפתרות "ביתר קלות" מן המשוואה שלפנינו. דבר זה ארוך מאוד להוכחה, אבל עיקר ההוכחה, היינו המעבר ממשוואה הנפתרת בקלות למשוואה הנפתרת בפחות קלות, ניתן להראות בפשטות, בעיקר על סמך המשוואות ממעלה שנייה, שאפשר לפתרן תמיד בשיטות קלות ופשוטות. ע"י נסיגה מן המשוואה הנתונה למשוואות הנפתרות בקלות רבה יותר ויותר נבוא סוף־סוף דרך אינדוקציה אל משוואה שהצגת מעלתה $n = i^\alpha m$ יהיה $\alpha = 0$, ולכן $n = m$. היינו, אל משוואה בעלת המעלה האי־זוגית, אשר לה יש שורש כפי שראינו במשפט (א)

מ.ש.ל.

אביא להלן הוכחה נוספת — הוכחתו של קושי (Cauchy) למשפט הכללי הכולל את שלושת המשפטים שלעיל. למרות שאינו על טהרת החשבון והאלגברה אלא אנליטי גרידא, בכל זאת אביאו כאן, כיוון שבסיס ההוכחה הוא מישור המספרים המרוכבים. לצורך ההוכחה נלביש מושגים לבוש הסתכלותי:

1) נרשה לגודל הבלתי מסוים x, המופיע בפולינום נתון $f(x)$, לקבל את כל הערכים המרוכבים! נוכל א"כ לתאר את תכונותיו של $f(x)$ עבור ערכים ידועים של x ע"י "מקומות ידועים" במישור גאוס המתאר את כל המספרים המרוכבים.

2) לכל הערכים (נקודות המישור) שבתוך עיגול מסויים, סביב הנקודה המתאימה למספר המרוכב a, ניתן את הביטוי "הסביבה" של ערך מסוים $x = a$.

נחלק עתה את ההוכחה שלפנינו לשלושה חלקים:

(1) נוכל למצוא מעגל שמרכזו הנקודה (0,0) כך שבקו המעגל עצמו ומחוצה לו יהיה $f(x)$ שונה על כל פנים מ־0; לא ימצא שם אפוא כל שורש למשוואה $f(x) = 0$.

במשפט (א) כבר הוכחנו טענה זו: מצאנו, שבשביל ערכים ממשיים גדולים למדי מ־x יהיה האיבר הראשון — היינו: $a_0x^n$ — של $f(x)$, האיבר המכריע ודבר זה נכון גם אם x יקבל ערכים מרוכבים כל שהם; במקום "ערך x גדול למדי" נותר במקרה זה: "x בעל ערך מוחלט גדול למדי". כלומר: בשביל ערכי x בעלי $|x|$ גדול למדי (כלומר גדול ממספר ממשי חיובי מסויים R). ימצא $|f(x)|$ בין $\frac{1}{2}|a_0x^n|$ לבין $\frac{3}{2}|a_0x^n|$. על כל פנים יהיה אפוא $f(x) \neq 0$, אם $R < (x)$. לפי תיאורם הגיאומטרי של המספרים המרוכבים קיים: $|x| = R$ בשביל אותם ערכי x (ורק בשבילם) המתאימים לנקודות שבקו המעגל בעל המחוג R והמרכז — (0,0). לכן, אי־השוויון $R < |x|$ מתאים לאותו חלק במישור הנמצא במחוץ למעגל הנ"ל. לפיכך, לא יימצא שורש למשוואה $f(x) = 0$ מחוץ למעגל $|x| = R$. (אם ורק אם $f(x)$ אינו קבוע)

(2) יהיה נתון ערך כלשהו של x, $x = a$. יכול להיות ש־$f(x)$ מתאפס עבור המספר המרוכב — a; זאת אומרת, שקיים $f(a) = 0$, אך אם a אינו שורש המשוואה: $f(x) = 0$ אזי אין במציאות "סביבה" של $x = a$ (לדוגמה: עיגול סביב $x = a$), כך שערכי $|f(x)|$ בסביבה הנכונה כולם גדולים מ־$|f(a)|$ (שהוא מספר ממשי חיובי) או שווים לו. במלים אחרות, אי־אפשר שיהיה $|f(a)|$ ערך מינימלי של $|f(x)|$ בסביבה של $x = a$.

ישנן אפוא בסביבה כלשהי של $x = a$ נקודות x שבשבילן $|f(x)| < |f(a)|$ (אפשר להגדיר בפירוש ערכי x בסביבת a הממלאים אי־שוויון זה).

כל זה נכון פרט למקרה $f(a) = 0$, שאז ודאי יש ל־$|f(x)|$ ערך מינימלי בסביבה $x = a$, שהרי 0 הוא הערך הקטן ביותר ש־$|f(x)|$ יכול לקבל.

(3) ישנו משפט כללי על פונקציות $f(x)$, הנכון לא רק בשביל פולינומים כי אם גם בשביל פונקציות כלליות יותר, האומר: אם נתון לנו במישור גאוס "עיגול סגור", היינו: תחום הכולל את כל נקודותיו של קו־מעגל מסויים ואת כל הנקודות שבפנים המעגל, אזי ישנו ערך מינימלי

בין ערכי $|f(x)|$ המתאימים לנקודות העיגול.

שלושת החלקים האלה מצטרפים להוכחת משפט (ג).

**הוכחה:** [לפי (1)] נבחר מספר ממשי חיובי R כך שחוץ למעגל $|x| = R$ יהי: $f(x) \neq 0$. לכן יימצאו שורשי המשוואה רק בעיגול הסגור $|x| \leq R$. בעיגול זה ישנו [לפי (3)] ערך או ערכי x (לדוגמא, $x = a$) ששם מקבל $|f(x)|$ ערך מינימלי. נניח לרגע כאילו היה הערך המינימלי הזה חיובי (שהרי על כל פנים הוא ממשי ואינו שלילי); אזי ישנן [לפי (2)] בסביבת הנקודה a נקודות x שעבורן: $|f(x)| < |f(a)|$; בפרט נוכל לקבוע את הסביבה הנדונה כך שהיא כולה בעיגול הנ"ל (פרט למקרה בו $|a| = R$, אז יש צורך בשינוי קל. במקרה זה יש לבחור ב־R אחר, כך שמחוץ למעגל יהיה $|a_n| < |f(x)|$). אבל בזה קיבלנו סתירה להגדרת הערך a אשר לפיה: $|f(a)| \leq |f(x)|$ שבכל עיגול ובוודאי בסביבה הנדונה. לכן, הנחתנו כאילו הערך המינימלי של $|f(x)|$ בעיגול: $|x| \leq R$, יהיה חיובי אינה נכונה. הערך המינימלי שווה אפוא ל־0, כלומר: ישנו במישור של גאוס, ובפרט בעיגול הנ"ל, ערך של x שאצלו $f(x) = 0$.

מ.ש.ל.

רואים אם כן, שלמשוואה אלגברית ממעלה n יש לפחות שורש (ממשי או מרוכב) אחד. על סמך ההוכחה הראשונה שבראש פרק זה נמצא, שגם במקרה הכללי, היינו אם המקדמים מרוכבים, יש למשוואה שורש.

במובן זה ההרחבה היא סופית. כפי שנראה להלן, שאין הרחבה טבעית נוספת של תחום המספרים המרוכבים [מ"מבוא למתמטיקה" פרופ' א' פרנקל, עמ' 219].

**1) נכונות משפט דה־מואבר עבור מעריך רציונלי.**

יהי המעריך הרציונלי $\frac{p}{q}$; ($p$ ו־$q$ מספרים שלמים).

כפי שראינו לעיל לגבי הוצאת שורש למספר מרוכב נוכל לרשום:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{q}}\sqrt[q]{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\frac{\theta}{q} + i\sin\frac{\theta}{q}$$

זאת אומרת:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{q}} = \cos\frac{\theta}{q} + i\sin\frac{\theta}{q}$$

לפי משפט דה־מואבר עבור מספרים שלמים כמעריכים למספר המרוכב, נקבל אחר העלאת האגפים בחזקת – P –

$$\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{q}}\right]^{P} = \left(\cos\frac{\theta}{q} + i\sin\frac{\theta}{q}\right)^{P} = \cos\frac{AP}{q} + i\sin\frac{\theta \cdot P}{q}$$

דהיינו:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{P}{q}} = \cos\frac{\theta P}{q} + i\sin\frac{\theta P}{q}$$

רואים אם כן את נכונות הנוסחה גם עבור המעריכים בתחום המספרים הרציונאליים — $\frac{P}{q}$.

**I) שימושי משפט דה־מואבר**

לשלושה דברים יש לנוסחת דה־מואבר חשיבות רבה.

1) העלאת מספר מרוכב רציונלי בחזקה רציונלית.

כדי להעלות מספר מרוכב בחזקה, נרשום אותו בתחילה בצורה הטריגונומטרית ונבצע את הפעולה לפי נוסחת דה־מואבר.

**דוגמאות:**

(1
$$(1+i)^{10} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10} = 32\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) =$$
$$= 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32i$$

(2
$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left[\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}\right]^{20} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right]^{20}$$
$$= 2^{10}\left(\cos\frac{35\pi}{3} + i\sin\frac{35\pi}{3}\right) =$$
$$= 1024\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) =$$
$$= 512 - 512\sqrt{3}\,i$$

(3
$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n = \left[2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]^n =$$
$$= 2^n\cos\frac{n\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$$

2) נוסחאות עבור $\sin n\theta$ ו־$\cos n\theta$.

**דוגמאות:**

(1) נחשב את $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$ בשני אופנים:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta \quad — 1$$

$$(\cos 2\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta \quad — 2$$

התוצאות חייבות להיות שוות, כלומר:

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = \cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta$$

לפי הגדרת שוויון מספרים מרוכבים נקבל:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

רואים א״כ שבעזרת הצורה הטריגונומטרית של מספרים מרוכבים קל למצוא ערכים ל־sin ו־cos של מכפלות של זווית במספר רציונלי.

(2) נוסחאות עבור $\sin 3\theta$ ו־$\cos 3\theta$.

1 — $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$.

2 — $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\sin^2\theta - i\sin^3\theta$.

התוצאות חייבות להיות שוות, כלומר:

$$(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + (3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)i$$

לפי הגדרת השוויון של מספרים מרוכבים נקבל:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

כאן, מציאת נוסחאות עבור: $\cos 3\theta$ ו־$\sin 3\theta$ היא קלה הרבה יותר מאשר החישוב הטריגונומטרי הפשוט עבור הפונקציות: $\cos 3\theta$ ו־$\sin 3\theta$.

3) באופן דומה אפשר לבטא את $\cos n\theta$ ו־$\sin n\theta$ בשביל n רציונלי בעזרת פונקציות של $\sin\theta$ ו־$\cos\theta$, כדלקמן:

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \dots + m$$

כאשר: עבור n זוגי —

$$m = (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\theta$$

עבור n אי־זוגי —

$$m = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\cos\theta \cdot \sin^{n-1}\theta$$

$$\sin n\theta = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \dots + m_1$$

כאשר: עבור n זוגי —

$$m_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\cos\theta\sin^{n-1}\theta$$

עבור n אי־זוגי —

$$m_1 = (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\theta$$

(3) חישוב סכומים טריגונומטריים מסויימים — דוגמא:

נוסחה עבור —

$$C = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$$

נרשום —

$$is = i\sin x + i\sin 2x + \dots + i\sin nx$$

נחבר:

$$c + is = i + (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin 2x) + \dots + (\cos nx + i\sin nx)$$

בעזרת נוסחת דה־מואבר נוכל לרשום:

$$c + is = i + (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin x)^2 + \dots + (\cos x + i\sin x)^n$$

לפי נוסחת טור גיאומטרי נקבל:

$$c + is = \frac{(\cos x + i\sin x)^{n+1} - 1}{\cos x + i\sin x - 1} = \frac{\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x - 1}{\cos x + i\sin x - 1} =$$

$$= \frac{[\cos(n+1)x - 1 + i\sin(n+1)x](\cos x - 1 - i\sin x)}{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x}$$

הסכום C הוא החלק הממשי של הביטוי $C + iS$. מקבלים:

$$c = \frac{\cos(n+1)x\cos x - \cos x - \cos(n+1)x + 1 + \sin(n+1)x\sin x}{2 - 2\cos x} =$$

$$= \frac{\cos nx - \cos(n+1)x + 1 - \cos x}{2 \cdot 2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

באותו אופן אפשר למצוא את S, שהוא החלק המדומה של הביטוי הנ״ל. נקבל אחר פיתוח דומה:

$$s = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+12}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

דוגמא נוספת: יש למצוא את הסכומים

**דוגמא נוספת: יש למצוא את הסכומים**

1) $$\cos x + \binom{n}{1}\cos 2x + \binom{n}{2}\cos 3x + \dots + \binom{n}{n}\cos(n+1)x$$

2) $$\sin x + \binom{n}{1}\sin 2x + \binom{n}{2}\sin 3x + \dots + \binom{n}{n}\sin(n+1)x$$

נסמן את הסכום הראשון באות — A ואת הסכום השני באות — B. מקבלים:

$$A + Bi = \cos x + i\sin x + \binom{n}{1}(\cos x + i\sin x)^2 + \binom{n}{2}(\cos x + i\sin x)^3 + \dots + \binom{n}{n}(\cos x + i\sin x)^{n+1} =$$

$$= (\cos x + i\sin x)(1 + \cos x + \sin x)^n =$$

$$= (\cos x + i\sin x)\left[2\cos\tfrac{x}{2}\left(\cos\tfrac{x}{2} + i\sin\tfrac{x}{2}\right)\right]^n =$$

$$= 2^n\cos^n\tfrac{x}{2}\left[\cos\left(1 + \tfrac{n}{2}\right)x + i\sin\left(1 + \tfrac{n}{2}\right)x\right]$$

ומכאן מקבלים:

$$A = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{(n+2)x}{2}$$

$$B = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{(n+2)x}{2}$$